

10. cvičení - teorie

15. 12. 2022

Definice 1. Necht f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}$. Pak

- derivace funkce f v bodě a je $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
- derivace funkce f v bodě a zleva je $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
- derivace funkce f v bodě a zprava je $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Tabulka s derivacemi.

Věta 2 (Aritmetika derivací). Necht $a \in \mathbb{R}$ a necht f a g jsou funkce definované na nějakém okolí bodu a . Necht existují $f'(a) \in \mathbb{R}^*$ a $g'(a) \in \mathbb{R}^*$.

a Platí $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$,

b Je-li alespoň jedna z funkcí f, g spojitá v bodě a , pak $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

c Je-li funkce g spojitá v bodě a a navíc $g(a) \neq 0$, pak $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$,

vždy je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 3 (O derivaci složené funkce). Necht f má derivaci v bodě $y_0 \in \mathbb{R}$, g má derivaci v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 = g(x_0)$ a g je v bodě x_0 spojitá. Potom $(f \circ g)'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$, je-li výraz na pravé straně definován.

Věta 4. Necht reálná funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a existuje $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Pak existuje $f'_+(a)$ a platí $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$. Levá strana analogicky.

Algoritmus podle Kristýny Kuncové:

- Určíme definiční obor Df . Na této množině pak budeme hledat derivaci.
- Zderivujeme mechanicky tam, kde to lze (musí jít o otevřené intervaly).
- Prokontrolujeme podmínky derivování, kraje definičních oborů, zlomky, místa, kde se láme předpis... a identifikujeme problémové body.
- Častí podezřelí: $\arcsin t$, $\arccos t$, $\operatorname{sgn} t$, $|t|$, $\max$ a $\min$, odmocniny, funkce definované „vidličkou“.
- V daných bodech najdeme derivaci z definice nebo z Věty 4. Neexistuje-li derivace, zkusíme najít alespoň jednostranné derivace.
- Uděláme závěr.